

RESIGNIFICACIÓN DE LA SERIE DE TAYLOR A TRAVÉS DE TECNOLOGÍA

Cynthia Almazán Colorado, Landy Sosa Moguel
Universidad Autónoma de Yucatán
almazan.cc@hotmail.com, smoguel@uady.mx
Campo de investigación: Pensamiento variacional

México

Nivel: Superior

Resumen. Esta investigación tiene como propósito generar argumentos de presentación y justificación sobre la Serie de Taylor a través de su visualización con tecnología, con la intención de identificar los significados que los estudiantes construyen sobre la Serie. Se empleó como metodología la ingeniería didáctica en el diseño y experimentación de actividades, desarrolladas mediante calculadoras graficadoras. La perspectiva teórica de la génesis instrumental permitió explicar la integración tecnológica del estudiante para construir conocimiento matemático. Se reportan los aspectos del análisis preliminar y del análisis a priori, a partir de los cuales se diseñaron las actividades, así como los principales argumentos generados por los estudiantes y los significados que le asignaron respecto a la Serie de Taylor.

Palabras clave: argumentación, Serie de Taylor, pensamiento variacional

Problemática

Al realizar un cambio en la presentación de un objeto matemático, digamos un tratamiento didáctico a través de un medio tecnológico surge un fenómeno didáctico llamado transposición informática, en el que las transformaciones que sufre el saber al introducir instrumentos tecnológicos en su tratamiento pueden dotarlo o hacer que pierda significados (Balacheff, 1994, citado por Contreras y Ortega, 2003). Siendo éste el fenómeno de estudio del presente trabajo, el objetivo fue generar argumentos de presentación y justificación, mediante la visualización de la Serie de Taylor a través de tecnología. La intención fue, identificar cuáles son los significados que construyen los estudiantes de nivel educativo superior sobre la Serie de Taylor al interactuar con un medio tecnológico.

Se partió de la hipótesis de que a través de actividades de visualización, es posible que un estudiante genere argumentos visuales y discursivos de la Serie de Taylor, mediante la integración de una calculadora gráfica como un instrumento de aprendizaje.

La aproximación teórica de la Génesis Instrumental favoreció entender la forma en que el artefacto tecnológico, a saber calculadoras graficadoras, van siendo incorporadas por el estudiante en la construcción de un conocimiento matemático, convirtiéndolo en un instrumento de aprendizaje que media su actividad y lo incorpora orgánicamente para hacer matemáticas

(Briseño, 2008). Es decir, se consideró que en la construcción de conocimiento a partir de una actividad matemática resuelta a través de un medio tecnológico, el estudiante debería incorporar dos procesos: 1) de conocimiento y manejo del artefacto tecnológico (instrumentación) y 2) de adquisición de esquemas de acción sobre el artefacto (instrumentación), mediante una interacción bidireccional estudiante-calculadora, calculadora-estudiante.

Metodología

Consideramos un diseño experimental para verificar nuestra hipótesis y, para ello, utilizamos la ingeniería didáctica, tanto como metodología para el diseño de actividades, como para su implementación y análisis de resultados. A continuación se presentan algunos datos de lo realizado u obtenido en cada fase de la metodología.

Análisis preliminar

Aspectos didácticos. En el trabajo de Marcolini y Perales (2005) se menciona que coexisten dos modelos didácticos respecto al tratamiento de la Serie Taylor, uno es sugerido por los trabajos de Newton, Euler y Laplace, entre otros, donde la expresión de la Serie lleva consigo un significado perteneciente a las ciencias experimentales, y que se introduce mediante una construcción natural para gran variedad de problemas. El otro se desprende de los trabajos de Cauchy, donde las series son el resultado más de la teoría, una consecuencia del concepto límite y del Teorema Fundamental del Cálculo. Bien sabemos que el segundo esquema es el que predomina en la enseñanza actual, mientras que el primero aunque se usa en varios contextos, no es contemplado en los temas que se imparten en la enseñanza universitaria. Estos autores afirman que para realizar un cambio en la presentación de la Serie de Taylor se requiere centrarse en las ideas propias de su génesis y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional.

Aspectos epistemológicos. Desde la perspectiva de Cantoral (2001) la idea germinal que destaca en esta Serie es la noción de predicción de los fenómenos naturales de flujo y lo analítico en el Cálculo, en su trabajo se mencionan ocho modelos de lo analítico de los cuales nos hemos centrado en tres modelos para la realización del diseño experimental:

Modelo de regularidad binomial

Se caracteriza por percibir y utilizar una regularidad en los desarrollos binomiales y centra su atención en su semejanza operativa con los números y magnitudes variables.

Modelo de predicción paramétrica

Radica en la determinación del estado futuro (estado vecino) con la información del estado actual (estado facto). De modo que, si conocemos el estado inicial de la magnitud a estudiar, es decir, la ordenada y sus variaciones sucesivas, es posible predecir el comportamiento del estado vecino con la ayuda del método de los incrementos finitos.

Modelo de aproximación polinomial

Se caracteriza por reducir el cálculo de la función al cálculo de polinomios. Para ello se construye una sucesión de éstos que converja a la función determinada y que hereden el comportamiento puntual de la función, para lo que también se estima el margen de error.

Como se mencionó, se pretendió generar argumentos sobre la Serie de Taylor de modo tal que en cada argumento se trabaje un modelo de la analiticidad y ciertas estrategias variacionales, con el fin de construir diferentes significados sobre la Serie. Particularmente se tuvieron en cuenta tres tipos de argumentación visual:

- *Argumento geométrico-numérico.* Relacionado con la estrategia de diferencias finitas de variables, consiste en aproximar y estimar numéricamente un valor específico a partir de la determinación geométrica de incrementos y decrementos de las variables.

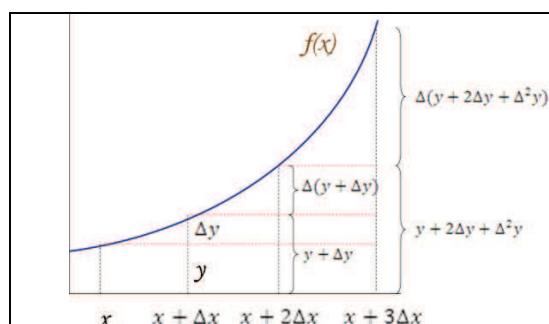


Imagen 1- Argumento geométrico-numérico

- *Argumento algebraico*. Consiste en que a partir de la determinación algebraica de incrementos de las variables y la identificación de un patrón binomial es posible aproximar y estimar numéricamente un valor específico. Véase la siguiente tabla:

Cambio en x	Cambio en y	
x	y	y
$x + \Delta x$	$y + \Delta y$	$y + \Delta y$
$x + 2\Delta x$	$(y + \Delta y) + \Delta(y + \Delta y)$	$y + 2\Delta y + \Delta^2 y$
$x + 3\Delta x$	$(y + 2\Delta y + \Delta^2 y) + \Delta(y + 2\Delta y + \Delta^2 y)$	$y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y$
\vdots	\vdots	
$x + n\Delta x$	$y + n\Delta y + \frac{n(n-1)\Delta^2 y}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)\Delta^3 y}{2 \cdot 3} + \dots$	

Tabla 1- Argumento algebraico

- *Argumento algebraico-gráfico*. Por medio de la representación gráfica de operaciones algebraicas se pueden aproximar funciones polinomiales.

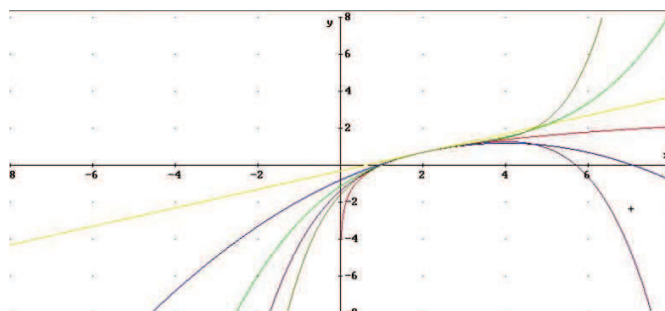


Imagen 2- Argumento algebraico-gráfico

Análisis a priori

El diseño consistió en cuatro ejercicios nombrados con una palabra clave:

- 1) *Ejercicio del "Cohete"*. Residió en el análisis de la posición de un cohete en función del tiempo, se efectuaron preguntas sobre la variación y el comportamiento gráfico y en algunas ocasiones, se vio la necesidad de predecir estados inmediatos (anteriores o posteriores) a partir de datos iniciales.

Este ejercicio tuvo dos intenciones: i) inducir la instrumentalización de la calculadora, y ii) acercar a los estudiantes nociones y estrategias variacionales asociadas a la Serie de Taylor, por ejemplo, la predicción y la estrategia de diferencias finitas de variables.

- 2) *Ejercicio de la “Partícula”.* Consistió en solicitar al estudiante estimar la posición de una partícula en movimiento en el tiempo $t = 4$, sabiendo que su trayectoria sigue el comportamiento $S(t) = \sqrt{t}$ y que $S(4) = 2$.
- 3) *Ejercicio de las “Diferencias”.* Se solicitó a los estudiantes completar un arreglo de diferencias finitas de variables y proponer un método general para predecir valores.
- 4) *Ejercicio de los “Polinomios”.* Se le presentó a los estudiantes un conjunto de polinomios y se les demandó construir con ellos, una función que se aproxime a $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ en el punto $a = 1$.

La intención de los ejercicios 2, 3 y 4 fue: i) inducir la instrumentación tecnológica en el estudiante, y ii) generar argumentos sobre la Serie de Taylor. La idea es que en cada ejercicio se genere un argumento y se trabaje con un modelo de analiticidad de la Serie de Taylor: “Partícula”, argumento numérico-geométrico y modelo de predicción paramétrica; “Diferencias”, argumento algebraico y modelo de regularidad binomial; “Polinomios”, argumento gráfico-algebraico y modelo de aproximación polinomial.

Experimentación

Para la implementación de las actividades experimentales, se trabajó con un grupo de 6 jóvenes universitarios de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán, con edades entre 19 y 20 años y con tres cursos de cálculo aprobados, es decir, tenían conocimiento de los tipos de funciones, de funciones en serie, del concepto derivada y de gráficas de funciones. Cada estudiante dispuso de una calculadora graficadora durante una semana de práctica para su manejo.

Análisis a posteriori

En esta etapa se analizaron los resultados obtenidos de la experimentación y se contrastaron con los resultados que se esperaban del análisis a priori, los cuales se presenta brevemente en el siguiente apartado.

Resultados y discusión

De los resultados obtenidos hemos rescatado dos elementos importantes:

- 1) Los argumentos generados asociados a la serie de Taylor
- 2) Los significados construidos mediante los argumentos

Describimos algunos argumentos brevemente:

Argumento geométrico-numérico (ejercicio de la “Partícula”). Al tratar de predecir la posición de la partícula en el tiempo $t = 4$, un estudiante construyó un método que puede ser utilizado para predecir la posición en cualquier instante de tiempo mediante la siguiente gráfica:

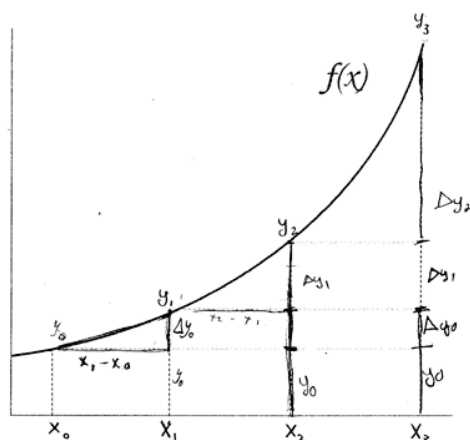


Imagen 3- Argumento geométrico de la Serie de Taylor generado por un estudiante

Por ejemplo, para predecir la posición de x_2 conociendo la posición de x_0 , este estudiante construyó la siguiente expresión: $y_2 = y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2$

Nótese que en su desarrollo se aprecia el empleo de la estrategia de *diferencias finitas de variables*, la expresión anterior se encuentra en términos de la primera diferencia. Esto lo podemos expresar de otra forma. Observando la gráfica se puede decir que $y_1 = y_0 + \Delta y_0$.

Entonces:

$$\Delta y_1 = \Delta(y_0 + \Delta y_0) = \Delta y_0 + \Delta^2 y_0 \quad (1)$$

Análogamente, observando en la gráfica podemos expresar y_2 como:

$$y_2 = y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_1 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0$$

Entonces:

$$\Delta y_2 = [\Delta(y)]_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0 = \Delta y_0 + 2\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 \quad (2)$$

Por tanto, sustituyendo (1) y (2) en la construcción del estudiante tenemos:

$$y_2 = y_0 + \Delta y_0 + (\Delta y_0 + \Delta^2 y_0) + (\Delta y_0 + 2\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0)$$

$$y_2 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0$$

Si se extiende este procedimiento y se realizan los cambios de variable necesarios, se obtiene la Serie de Taylor.

El significado que los estudiantes construyeron sobre la Serie de Taylor en este ejercicio alude al uso de la Serie como una herramienta para predecir un valor mediante su aproximación con incrementos finitos de los valores de la variable en juego, también se entendió la serie como un proceso para estimar variaciones.

Argumento gráfico-algebraico (ejercicio de los "Polinomios"). Se generaron dos tipos de resultados concernientes a la noción de "aproximación" que cada estudiante concibió.

- 1) Aproximación puntual. Algunos estudiantes se dieron a la tarea de realizar una aproximación de la función $f(x)$ específicamente en el punto $x_0 = 1$.

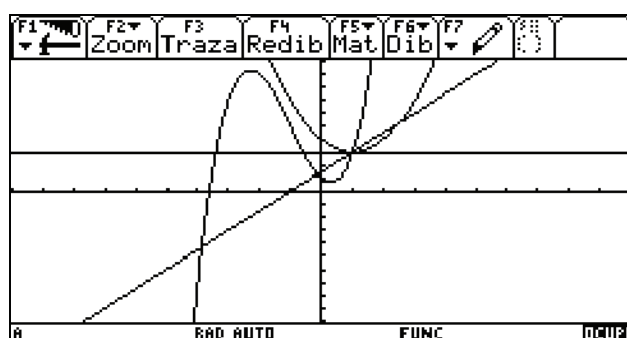


Imagen 4- Aproximación puntual

- 2) Aproximación global. Otros estudiantes realizaron una aproximación global, es decir, intentaron construir una expresión polinomial cuya gráfica fuera casi la misma que la gráfica de $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$.

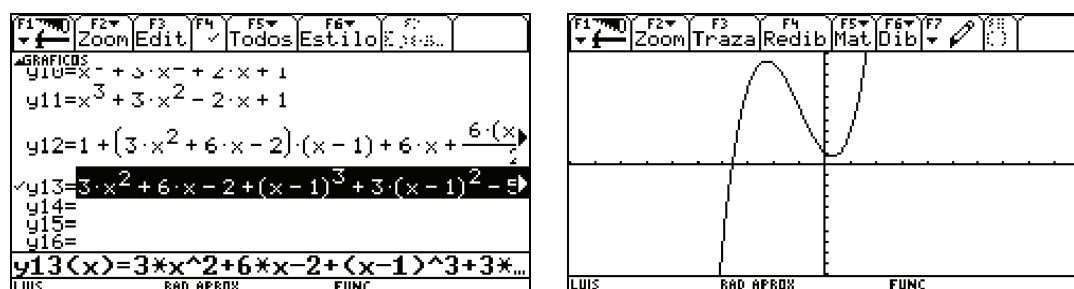


Imagen 5- Aproximación global

Es posible que parezca que estos procesos fueron realizados “al tanteo”, pero en ellos intervienen varias estrategias para construir con éxito la función correcta, como la *integración de registros de representación* que se observan al elegir adecuadamente los polinomios de manera algebraica, mirar su efecto en el *comportamiento de su gráfica* y regresar al registro gráfico para modificar parámetros hasta obtener la aproximación más precisa. El significado inmerso en este ejercicio fue concebir la Serie como una *aproximación polinomial*. Es decir, las ideas y significados que los estudiantes construyeron sobre la Serie de Taylor en este ejercicio fueron que la Serie es una función cuya gráfica representa una operación de funciones de diferentes grados y comportamientos con una tendencia en común (polinomial), con lo cual es posible aproximar funciones de manera puntual y global por medio de la suma deliberada de polinomios.

Conclusiones

Para resignificar la Serie de Taylor es importante abordarlo desde la perspectiva de su génesis y poner en juego estrategias y nociones variacionales tales como: diferenciación finita de variables, noción de variación, tránsito entre registros de representación, entre otras, en situaciones de variación en las que se requiere predecir o aproximar un valor.

Considerando esos aspectos, la integración de la calculadora graficadora en la práctica del estudiante favoreció la visualización de la Serie de Taylor y formas de pensamiento y lenguaje variacional, permitiéndole tener una visión global y local (tanto cualitativa como cuantitativa) de

las gráficas que utilizaban y transitar entre diferentes registros de representación. A su vez, esto propició que para los estudiantes la Serie representara algo más que la combinación de variables y constantes en una expresión analítica, resignificando la Serie en tanto una representación de un polinomio con cierto comportamiento gráfico, como una relación entre diferencias sucesivas o concibiéndola como una técnica para aproximarse a valores de una función o puntos de una curva.

En síntesis, el uso de la calculadora graficadora permitió a los estudiantes construir herramientas (nociones y estrategias), para responder a una tarea de predicción en la que se requería aproximarse al valor de la ordenada de una función conociendo ciertos valores iniciales, es decir, construir un conocimiento matemático referente a la Serie de Taylor.

Referencias bibliográficas

Briseño, E. (2008). *El uso de las gráficas desde una perspectiva instrumental. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de maestría no publicada, Centro de investigación y de estudios avanzados del IPN, Distrito Federal, México.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa: Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Contreras, A. y Ortega, M. (2003). *El objeto tecnológico MATHEMATICA en la enseñanza del Análisis, ¿es sólo un amplificador cognitivo?*. Recuperado el 19 de octubre de 2008 de http://64.233.169.104/search?q=cache:WNZzGL_IDwJ:www.ugr.es/~jgodino/siidm/cordoba_2003/acontrerasdoc.doc+transposicion+informatica&hl=es&ct=clnk&cd=6&gl=mx&client=firefox-a

Marcolini, M. y Perales, J. (2005). La noción de predicción: análisis y propuesta didáctica para la educación. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 8(1), 25-68.